Turunan Fungsi

bagustris

12 Nopember 2025

Overview

Limit fungsi

Definisi:

Fungsi $y = f(x)$ dikatakan mempunyai Limit L untuk x mendekati a ditulis

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (yang bagaimanapun kecilnya) dapat ditunjuk bilangan $\delta > 0$ (biasanya bergantung pada ε) sedemikian hingga $|f(x) = L| < \varepsilon$ untuk $0 < |x - a| < \delta$.

Dalil-dalil limit:

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$ maka :

1. $\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$
2. $\lim_{x \to a} f(x).g(x) = L.M$
3. $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{L}, \quad jika\ L \neq 0$
4. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad jika\ M \neq 0$

Fungsi Kontinyu

Definisi: Suatu fungsi $y = f(x)$ dikatakan kontinyu di $x = a$ jika

1. f(a) ada
2. $\lim_{x \to a} f(a) = ada$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Tegasnya $f(x)$ disebut kontinyu di $x = a$ jika

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ada.

Jika $f(x)$ kontinyu pada setiap titik dari suatu interval maka $f(x)$ dikatakan kontinyu pada interval itu.

Jika satu alasan atau lebih dari syarat-syarat kontinyuitas diatas tidak terpenuhi, maka $f(x)$ dikatakan diskontinyu di $x = a$.

Turunan fungsi

- Limit fungsi ketika x mendekati nilai a didefinisikan sbg,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

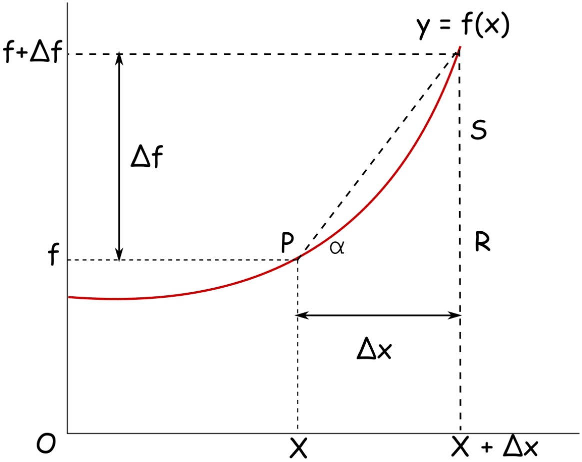
- Kalkulus diferensial $\to$ laju perubahan fungsi Δf terhadap perubahan waktu Δx.
- Laju perubahan $\to$ rasio dari perubahan fungsi Δf terhadap perubahan waktu Δx.
- Sepanjang interval Δx, fungsi berubah dari $f(x)$ menjadi $f(x + \Delta x)$, sehingga

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

- Apabila kita memperkecil Δx maka turunan $\Delta f \ / \ \Delta x$ sama dengan mencari limitnya,

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Turunan fungsi



Soal

Dengan menggunakan definisi turunan $\left(\frac{df}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$, dapatkan turunan dari fungsi berikut:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = 2x$
4. $f(x) = \sin(x)$

Logaritma dan Bilangan Natural

$$\boxed{{}^{a}\log b = c} \Longrightarrow \text{logaritma Brigg}$$

Syarat: $a > 0, a \neq 1, b > 0, c =$semua bil. real

a disebut bilangan pokok bilangan logaritma

Sifat:

$${}^{a}\log b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{{}^{2}\log b}{{}^{2}\log a} = \frac{{}^{n}\log a}{{}^{n}\log b}$$

Bilangan natural/alam= e $= 2.71828183$

$${}^{a}\log b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{{}^{e}\log b}{{}^{e}\log a} = \frac{{}^{e}\ln a}{{}^{e}\ln b}$$

$${}^{e}\log x = \ln x$$

$$\boxed{y = \ln[f(x)] \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Sifat-sifat Turunan

Jika $u = f(x), v = g(x)$, maka:

1. $y = u \pm v \implies y' = u' \pm v'$
2. $y = uv \implies y' = u'v + uv'$
3. $y = \frac{u}{v} \implies y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $y = u^v \implies y' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)$

Beberapa rumus turunan[1]:

1. $y = C \implies y' = 0$
2. $y = x^n \implies y' = nx^{n-1}$
3. $y = e^x \implies y' = e^x$
4. $y = \ln x \implies y' = \frac{1}{x}$
5. $y =^a \log x \implies y' = \frac{1}{x \ln a}$
6. $y = a^x; (a > 0, a \neq 1) \implies y' = a^x \ln a$

Beberapa Rumus Turunan[2]

7. $y = \sin x \Longrightarrow y' = \cos x$
8. $y = \cos x \Longrightarrow y' = -\sin x$
9. $y = \tan x \Longrightarrow y' = \sec^2 x$
10. $y = \cot x \Longrightarrow y' = -\csc^2 x$
11. $y = \sec x \Longrightarrow y' = \sec x \tan x$
12. $y = \csc x \Longrightarrow y' = -\csc x \cot x$
13. $y = \ln|\sin x| \Longrightarrow y' = \cot x$
14. $y = \ln|\cos x| \Longrightarrow y' = -\tan x$
15. $y = \ln|\sec x + \tan x| \Longrightarrow y' = \sec x$
16. $y = \ln|\csc x - \cot x| \Longrightarrow y' = \csc x$
17. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}$

Beberapa Rumus Turunan[3]

18. $y = \arcsin x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
19. $y = \arccos x \Longrightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $y = \arctan x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
21. $y = arccot\ x \Longrightarrow y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$
22. $y = arcsec\ x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
23. $y = arccsc\ x \Longrightarrow y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Fungsi Hiperbolik

Definisi:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Sifat-sifat:

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
3. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

Turunan:

1. $y = \sinh x \Longrightarrow y' = \cosh x$
2. $y = \cosh x \Longrightarrow y' = \sinh x$
3. $y = \tanh x \Longrightarrow y' = sech^2 x$

Aturan berantai

Jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Jika $y = f(u)$, $u = g(v)$ dan $v = h(x)$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

<u>Soal:</u>

1. $y = (2x + 5)^5 \implies y' = ...?$
2. $y = (x^2 + 2)^4 \implies y' = ...?$

Turunan tingkat tinggi

$$
\begin{aligned}
y = f(x) \Longrightarrow\ & \text{turunan ke 1 terhadap x adalah } y' = f'(x) \\
& \text{turunan ke 2 terhadap x adalah } y'' = y^{(2)} = f^{(2)}(x) \\
& \text{turunan ke 3 terhadap x adalah } y''' = y^{(3)} = f^{(3}(x) \\
& \text{...dst} \\
& \text{turunan ke n terhadap x adalah } y^{(n)} = f^{(n)}(x)
\end{aligned}
$$

<u>Soal:</u>

1. $y = e^{ax} \rightarrow y^{(n)} = ...?$
2. $y = \sin x \rightarrow y^{(n)} = ...?$

Rumus Leibnitz

$D = \frac{d}{dx}$ operator turunan; $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$;

$$D = \frac{d}{dx} \rightarrow \; operator \;\; turunan \;\; tingkat \;\; n$$

Jika $y = UV$ dimana $U = f(x)$ dan $V = g(x)$ maka turunan n dari y terhadap x dinyatakan dengan $y^(n) = D^n(UV)$ dan dirumuskan sbb:

$$y^n(UV) = UD^nV + nDUD^{n-1}V + \frac{1}{2!}n(n-1)D^2UD^{n-2}V + \frac{1}{3!}n(n-1)D^3UD^{n-3}V + \ldots \quad (1)$$

Bukti:

$$y = UV \Longrightarrow y' = UV' + U'V$$
$$y'' = UV'' + 2U'V' + U''V$$
$$y^{(3)} = UV^{(3)} + 3U'V^{(2)} + 3U^{(2)V'} + U^{(3)}V$$

Turunan fungsi parametrik

Jika $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ maka,

$$\boxed{y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; y" = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \ldots}$$

$$y^{(n)} = \frac{\frac{dy^{(n-1)}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

<u>Soal:</u>

Dapatkan $y"$ dari $x = a\cos t$ dan $y = b\sin t$

Menurunkan fungsi implisit

y' dari $f(x, y) = 0$ didapat sebagai berikut:

1. Jika mungkin y dinyatakan sebagai fungsi explisit dalam x
   Contoh: $x^2 + y - 3 = 0 \Longrightarrow y = 3 - x^2$
   $$y' = -2x$$
2. Setiap suku dalam $f(x, y) = 0$ diturunkan terhadap x. Karena y fungsi x maka setiap kali menurunkan y harus digandakan dengan y', kemudian hubungan yang didapat diselesaikan ke y'.
   Contoh:
   $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
   $3x^2 + 3y^2y^1 - 3a(y + xy') = 0$
   $3(ax - y^2)y^1 = 3(x^2 - ay) \Longrightarrow y' = \dfrac{x^2 - ay}{ax - ay}$

Soal

Dapatkan y' dari:

- $y = x \sinh x$
- $y = \ln \sqrt{2x + 1}$
- $y = e^{2x+y} + \sin(x + 2y)$
- $y = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$