Matriks dan Determinan

Bagus Tris Atmaja
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

12 Nopember 2025

Table of Contents

Definisi

Matriks adalah suatu susunan deretan empat persegi panjang dari bilangan-bilangan yang tersusun dalam m baris dan n kolom dalam tanda kurung.
Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

adalah suatu matriks berukuran 3x4. Ditulis A_{3x4} (3 baris 4 kolom).
Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya (disebut matriks dengan orde n).
Matriks Simetrik adalah matrik bujur sangkar jika ditransposekan hasilnya sama.

$$A = A^T$$

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Trace: Jumlah elemen diagonal pokok suatu matriks bujur sangkar.

$$Trace \quad A = 2 + 5 + 1 = 8$$

- Matriks singular: Jika determinan matriks bujur sangkar adalah nol.
- Matriks baris: Jika $m = 1$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Matriks

- Matriks kolom: Jika $n = 1$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

- Matris nol: matrik yang semua elemennya adalah nol.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriks Satuan:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks

- Matriks Diagonal: Matriks bujur sangkar yang mempunyai nilai pada elemen diagonal sedang elemen lainnya nol.

$$a_{ii} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} \end{bmatrix}$$

- Transpose: transpose dari matriks A adalah matriks dimana baris dan kolom dipertukarkan.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \implies A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

- Minor: Minor M_{ij} dari suatu matriks A dibentuk dengan menghilangkan baris ke i dan kolom ke j dari matriks asal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \implies M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks

- Kofaktor: Kofaktor C_{ij} adalah sama dengan minor yang tertanda $(-1)^{i+j}M_{ij}$.

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\ M_{12} = -M_{12}$$

- Matriks Inversi: Inversi $A^{(-1)}$ dari matriks A memenuhi hubungan,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

- Matriks orthogonal: Matriks yang mememenuhi hubungan,

$$A^{T}A = AA^{T} = I$$

Adjoint Matriks

Suatu matriks adjoint dari matriks bujur sangkar A adalah transpose matriks kofaktor A.

Misalkan matriks kofaktor A adalah:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = \left[C_{ij}^T\right] = \left[C_{ji}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua matriks A dan B dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika dan hanya jika kedua matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama.

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ maka:

- Penjumlahan: $(A + B) = [a_{ij} + b_{ij}]$
- Pengurangan: $(A - B) = [a_{ij} - b_{ij}]$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Perkalian Skalar dengan Matriks

Jika k adalah suatu bilangan skalar dan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks, maka perkalian skalar dengan matriks adalah:

$$kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}]$$

Contoh:

Jika $k = 3$ dan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks

Matriks A berukuran $m \times n$ dapat dikalikan dengan matriks B berukuran $n \times p$ menghasilkan matriks C berukuran $m \times p$.

Syarat: Jumlah kolom matriks pertama harus sama dengan jumlah baris matriks kedua.

Elemen c_{ij} dari matriks hasil C adalah:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Contoh:

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks (lanjutan)

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{2\times 2} = AB = \begin{bmatrix} (1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1) & (1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0) \\ (4\cdot 1 + 5\cdot 0 + 6\cdot 1) & (4\cdot 2 + 5\cdot 1 + 6\cdot 0) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 13 \end{bmatrix}$$

Catatan: Perkalian matriks tidak komutatif, artinya $AB \neq BA$ (secara umum).

Sifat-sifat Operasi Matriks

Misalkan A, B, dan C adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sesuai, dan k, m adalah skalar, maka berlaku:

1. $A + B = B + A$ (komutatif penjumlahan)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asosiatif penjumlahan)
3. $A + O = O + A = A$ (identitas penjumlahan)
4. $A + (-A) = O$ (invers penjumlahan)
5. $k(A + B) = kA + kB$ (distributif kiri)
6. $(k + m)A = kA + mA$ (distributif kanan)
7. $(km)A = k(mA)$ (asosiatif perkalian skalar)
8. $(AB)C = A(BC)$ (asosiatif perkalian matriks)
9. $A(B + C) = AB + AC$ (distributif kiri perkalian)
10. $(A + B)C = AC + BC$ (distributif kanan perkalian)
11. $AI = IA = A$ (identitas perkalian)

Definisi Determinan

Determinan adalah suatu bilangan yang dihubungkan dengan suatu matriks bujur sangkar.

Untuk matriks A berukuran $n \times n$, determinannya ditulis sebagai:

$$\det(A) \quad \text{atau} \quad |A|$$

Sifat penting:

- Determinan hanya didefinisikan untuk matriks bujur sangkar
- Determinan menghasilkan suatu bilangan skalar
- Jika $\det(A) = 0$, matriks A disebut **singular** (tidak memiliki invers)
- Jika $\det(A) \neq 0$, matriks A disebut **non-singular** (memiliki invers)

Ekspansi Laplace

Ekspansi Laplace adalah metode untuk menghitung determinan matriks dengan mengekspansikan sepanjang suatu baris atau kolom.

Determinan matriks A berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan ekspansi baris ke-i:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}$$

atau ekspansi kolom ke-j:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}$$

dimana:

- a_{ij} adalah elemen matriks pada baris i kolom j
- C_{ij} adalah kofaktor
- M_{ij} adalah minor (determinan submatriks)

Determinan Orde 1

Untuk matriks 1×1:

$$A = [a_{11}]$$

Determinannya adalah:

$$\det(A) = a_{11}$$

Contoh:

$$A = [5] \quad \implies \quad \det(A) = 5$$

Determinan Matriks 2x2

Untuk matriks 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Determinannya adalah:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (3)(4) - (2)(1) = 12 - 2 = 10$$

Determinan Matriks 3x3 dengan Ekspansi Laplace

Untuk matriks 3×3, kita ekspansi sepanjang baris pertama:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

dimana:

$$C_{11} = (+1)\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$C_{12} = (-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$C_{13} = (+1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

Contoh Ekspansi Laplace untuk Matriks 3x3

Hitung determinan matriks berikut dengan ekspansi baris pertama:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solusi:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(4 \cdot 5 - 1 \cdot 2) - 1(0 \cdot 5 - 1 \cdot 1) + 3(0 \cdot 2 - 4 \cdot 1) \\ &= 2(20 - 2) - 1(0 - 1) + 3(0 - 4) \\ &= 2(18) - 1(-1) + 3(-4) \\ &= 36 + 1 - 12 = 25 \end{aligned}$$

Strategi Pemilihan Baris/Kolom

Tips untuk Ekspansi Laplace:

1. Pilih baris atau kolom yang memiliki paling banyak elemen nol untuk mempermudah perhitungan
2. Elemen nol tidak perlu dihitung kofaktornya (karena dikalikan nol)
3. Ekspansi dapat dilakukan di baris atau kolom manapun, hasilnya sama

Contoh: Untuk matriks

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Lebih efisien ekspansi sepanjang kolom kedua (3 elemen nol):

$$\det(B) = 0 - 0 + 0 = 0$$

Jadi matriks B adalah matriks singular.

Aturan Sarrus

Aturan Sarrus adalah metode khusus untuk menghitung determinan matriks 3×3 secara cepat.

Untuk matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Langkah-langkah:

1. Tulis ulang 2 kolom pertama di sebelah kanan matriks
2. Kalikan elemen-elemen diagonal dari kiri atas ke kanan bawah (positif)
3. Kalikan elemen-elemen diagonal dari kiri bawah ke kanan atas (negatif)
4. Jumlahkan hasil perkalian dengan tanda yang sesuai

Aturan Sarrus - Formula

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Diagonal positif (kiri atas ke kanan bawah):

$$+a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Diagonal negatif (kiri bawah ke kanan atas):

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Contoh Aturan Sarrus

Hitung determinan matriks berikut menggunakan Aturan Sarrus:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Diagonal positif:

$$(2)(4)(5) + (1)(1)(1) + (3)(0)(2) = 40 + 1 + 0 = 41$$

Diagonal negatif:

$$(3)(4)(1) + (2)(1)(2) + (1)(0)(5) = 12 + 4 + 0 = 16$$

Hasil:

$$\det(A) = 41 - 16 = 25$$

Catatan Penting Aturan Sarrus

- Aturan Sarrus **hanya berlaku** untuk matriks 3×3
- Untuk matriks 2×2, gunakan rumus langsung
- Untuk matriks 4×4 atau lebih besar, gunakan Ekspansi Laplace
- Aturan Sarrus lebih cepat daripada Ekspansi Laplace untuk matriks 3×3
- Hasil determinan sama dengan metode Ekspansi Laplace

Determinan Transpose

Teorema: Determinan suatu matriks sama dengan determinan transposenya.

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Implikasi:

- Semua sifat determinan yang berlaku untuk baris juga berlaku untuk kolom
- Ekspansi Laplace dapat dilakukan sepanjang baris atau kolom
- Operasi baris dan operasi kolom memiliki efek yang sama terhadap determinan

Bukti untuk Matriks 2x2

Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Maka:

$$\det(A) = ad - bc$$
$$\det(A^T) = ad - cb = ad - bc$$

$$\therefore \det(A) = \det(A^T)$$

Contoh Determinan Transpose

Verifikasi bahwa $\det(A) = \det(A^T)$ untuk matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Menggunakan Ekspansi Laplace baris pertama untuk A:

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(24 - 0) - 2(0 - 5) + 3(0 - 4) = 24 + 10 - 12 = 22$$

Contoh Determinan Transpose (lanjutan)

Menggunakan Ekspansi Laplace baris pertama untuk A^T:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T) = 1 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(24 - 0) - 0 + 1(10 - 12) = 24 - 2 = 22$$

$$\therefore \det(A) = \det(A^T) = 22 \quad \checkmark$$

Sifat-sifat Determinan (1)

Berikut adalah sifat-sifat penting determinan:

1. **Determinan Transpose:** $\det(A^T) = \det(A)$
2. **Determinan Matriks Identitas:** $\det(I) = 1$
3. **Perkalian Skalar:** Jika matriks A dikalikan dengan skalar k, maka:

   $$\det(kA) = k^n \det(A)$$

   dimana n adalah ukuran matriks (untuk matriks $n \times n$)
4. **Determinan Perkalian Matriks:**

   $$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Sifat-sifat Determinan (2)

5. **Baris/Kolom Nol:** Jika suatu baris atau kolom semuanya nol, maka $\det(A) = 0$
6. **Baris/Kolom Identik:** Jika dua baris atau dua kolom identik, maka $\det(A) = 0$
7. **Baris/Kolom Proporsional:** Jika suatu baris/kolom adalah kelipatan dari baris/kolom lain, maka $\det(A) = 0$
8. **Pertukaran Baris/Kolom:** Jika dua baris atau kolom ditukar, maka determinan berubah tanda:

$$\det(A') = -\det(A)$$

Sifat-sifat Determinan (3)

9. **Perkalian Baris/Kolom dengan Skalar:** Jika suatu baris/kolom dikalikan dengan skalar k, determinan juga dikalikan dengan k
10. **Penjumlahan Kelipatan Baris/Kolom:** Jika suatu baris/kolom ditambah dengan kelipatan baris/kolom lain, determinan tidak berubah:

$$R_i \to R_i + kR_j \Rightarrow \det(A') = \det(A)$$

11. **Determinan Matriks Segitiga:** Determinan matriks segitiga (atas atau bawah) adalah perkalian elemen diagonal utamanya
12. **Determinan Invers:** $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (jika A invertibel)

Contoh Sifat Determinan

Contoh 1: Determinan perkalian matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 8 - 3 = 5, \quad \det(B) = 1 - 0 = 1$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}, \quad \det(AB) = 20 - 15 = 5$$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 5 \cdot 1 = 5 \quad \checkmark$$

Contoh Sifat Determinan (lanjutan)

Contoh 2: Determinan matriks segitiga atas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Determinan = perkalian elemen diagonal:

$$\det(A) = 2 \times 4 \times 6 = 48$$

Contoh 3: Perkalian skalar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = -2$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad \det(2A) = 16 - 24 = -8 = 2^2 \cdot (-2) \quad \checkmark$$

Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear dengan n variabel dan n persamaan dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$AX = B$$

dimana:

- A adalah matriks koefisien $(n \times n)$
- X adalah vektor variabel $(n \times 1)$
- B adalah vektor konstanta $(n \times 1)$

Contoh: Sistem 2 persamaan 2 variabel:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

dapat ditulis: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

Metode Invers Matriks

Jika $\det(A) \neq 0$, maka sistem $AX = B$ memiliki solusi tunggal:

$$X = A^{-1}B$$

Untuk matriks 2×2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Catatan:

- Jika $\det(A) = 0$, sistem tidak memiliki solusi tunggal
- Sistem bisa tidak memiliki solusi atau memiliki tak hingga solusi

Contoh Metode Invers

Selesaikan sistem: $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2(-1) - 3(1) = -2 - 3 = -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 - 3/5 \\ 8/5 + 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, $x = 1$ dan $y = 2$

Aturan Cramer

Aturan Cramer menyatakan bahwa untuk sistem $AX = B$, solusinya adalah:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

dimana A_i adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti kolom ke-i dari A dengan vektor B. Untuk sistem 2 variabel:

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

dimana:

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

Contoh Aturan Cramer

Selesaikan sistem: $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$ dengan Aturan Cramer

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = -5$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det(A_1) = 8(-1) - 3(-1) = -8 + 3 = -5$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det(A_2) = 2(-1) - 8(1) = -2 - 8 = -10$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Jadi, $x = 1$ dan $y = 2$ (sama dengan metode invers)

Ringkasan Metode Penyelesaian Sistem Linear:

1. **Metode Invers Matriks:** $X = A^{-1}B$
   - Efisien untuk banyak sistem dengan matriks A yang sama
   - Memerlukan perhitungan invers matriks
2. **Aturan Cramer:** $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$
   - Baik untuk sistem kecil (2-3 variabel)
   - Memerlukan perhitungan banyak determinan
3. **Eliminasi Gauss:** (akan dipelajari lebih lanjut)
   - Paling efisien untuk sistem besar
   - Tidak memerlukan perhitungan determinan

Ringkasan Determinan

- Determinan adalah bilangan yang terkait dengan matriks bujur sangkar
- Minor dan kofaktor digunakan untuk menghitung determinan
- Ekspansi Laplace: metode umum untuk semua orde
- Aturan Sarrus: metode cepat khusus untuk 3×3
- $\det(A) = \det(A^T)$
- Sifat-sifat determinan berguna untuk perhitungan efisien
- Determinan digunakan dalam:
  - Menentukan invertibilitas matriks
  - Aturan Cramer untuk sistem linear
  - Menghitung invers matriks